IZ NASTAVNE PRAKSE

Primjeri za kraj ili „motivacija” na kraju

Petar Mladinić[1]

Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu, matematičko obrazovanje učenicima treba omogućiti postavljanje i rješavanje matematičkih problema, potičući ih pritom na istraživanje, sustavnost, kreativnost, korištenje informacija iz različitih izvora, samostalnost i ustrajnost. Tijekom matematičkog obrazovanja učenici trebaju uvidjeti važnost matematike u njihovim životima, steći uvid u povijesni razvoj ove znanosti, kao i spoznati njenu ulogu i važnost u društvu tijekom prošlosti, sadašnjosti i budućnosti.

Realizacija ovako postavljenih ciljeva matematičkog obrazovanja zahtijeva od nas da svoje učenike postavljamo u različite problemske situacije kako bismo ih potaknuli na istraživanje i motivirali za učenje. Poželjno je da motivacijski primjeri i priče budu i višeslojni i višenamjenski te, pored svega, prirodni za matematički sadržaj koji će se razmatrati. Oni u nastavu matematike unose elemente drame i povijesni kontekst pojmova i rješavanja problema koji se poučavaju. Sve je to poznato iz različitih područja i izvora „dramatizacije” nastave.

No, motivacija nije važna samo kao poticaj na početku upoznavanja učenika s novim nastavnim sadržajima. Ona je korisna i pri usustavljivanju naučenog... Nekako se čini da nakon cijele školske godine učenja i poučavanja određenog matematičkog sadržaja ipak nešto nedostaje. Nešto za kraj!

Stoga ovdje predlažemo primjer za kraj – kao pokušaj završnog scenarija povezivanja dijela ideja i problema koji su razmatrani tijekom školske godine.

Uvod

U *Moskovskom papirusu*, koji povjesničari smještaju u razdoblje 2100. - 1800. g. pr. K., nalazi se 25 zadataka. U 14. zadatku nazvanom *Operacije s krnjom piramidom* dano je točno rješenje obujma krnje kvadratne piramide čije su duljine osnovnih bridova donje baze 4, gornje 2 i visine 6. U papirusu je napisano da je obujam jednak 56. Nije navedena formula za obujam.

[1]Petar Mladinić, V. gimnazija, Zagreb

Heron Aleksandrijski u svojem radu *Metrica* navodi formulu za određivanje obujma krnje piramide. Formulu koju danas rabimo u opisnom se obliku nalazi u Fibonaccijevoj knjizi *Praksa geometrije*.

Dakle, formula za obujam krnje piramide

$$V=\frac{1}{3}h\left(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2\right)$$

sa zadanim duljinama bridova baza a, b u Moskovskom papirusu glasi:

$$V=\frac{1}{3}h\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Uvrstimo li za $a=4$, $b=2$ i $h=6$, dobivamo da je obujam $V=56$.

No, Heron je uspješno riješio i problem određivanja visine h pomoću izmjerljivih veličina krnje piramide, tj. pomoću duljina bridova. Našao je da je duljina visine dana s

$$h=\sqrt{c^2-2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

gdje su a i b duljine osnovnih bridova, a c duljina bočnog brida.

Razmotrimo sljedeće činjenice.

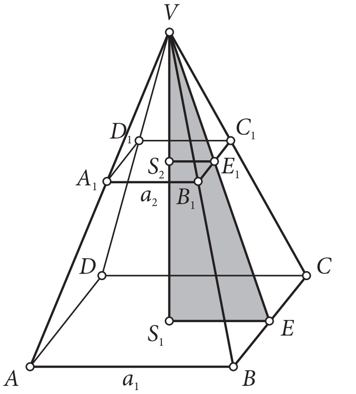
Dva problema

a) Visina krnje kvadratne piramide

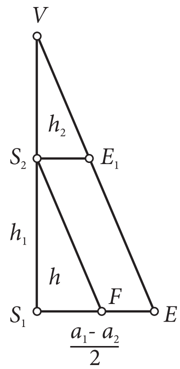
Izvedimo formulu za krnju kvadratnu piramidu. Možemo jednostavno zamisliti da krnja kvadratna piramida nastaje tako da se od jedne piramide odsiječe manja piramida (koja se često zove *dopunjak*).

Neka su duljine osnovnih bridova ovih piramida a_1 i a_2, a njihove visine h_1 i h_2.

Slika 1.



Slika 2.



Trebamo izraziti visinu h krnje piramide pomoću visine h_1 i h_2. U pravokutnom trokutu VS_1E točkom S_2 nacrtamo paralelu s VE i dobivamo točku F na dužini $\overline{S_1E}$ (v. sl. 2.).

Iz sličnosti trokuta S_2S_1F i VS_2E_1 dobivamo da je

$$h : h_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} : \frac{a_2}{2},$$

odnosno

$$h_2 = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \cdot h.$$

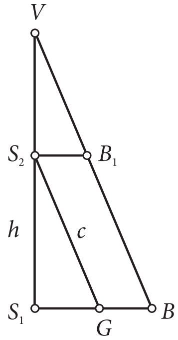
Obujam krnje piramide V jednak je razlici obujama V_1 i V_2 kvadratnih piramida. Imamo:

$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 \\
&= \frac{1}{3}a_1^2 h_1 - \frac{1}{3}a_2^2 h_2 \\
&= \frac{1}{3}a_1^2 (h + h_2) - \frac{1}{3}a_2^2 h_2 \\
&= \frac{1}{3}a_1^2 h + \frac{1}{3}(a_1^2 - a_2^2) h_2 \\
&= \frac{1}{3}a_1^2 h_1 + \frac{1}{3}(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) \cdot \frac{a_2}{a_1 - a_2} h \\
&= \frac{1}{3}(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \cdot h.
\end{aligned}$$

Riješimo i problem određivanja obujma samo pomoću izmjerljivih veličina, tj. pomoću duljina bridova.

Zadana je krnja kvadratna piramida s duljinama osnovnih bridova a_1 i a_2 , te duljinom bočnog brida c. Izvedimo formulu za obujam krnje piramide.

Izdvojimo iz slike 1. trokut VS_1B i nacrtajmo paralelu s VB kroz točku S_2. Dobivamo presjek G na dužini $\overline{S_1B}$.



Slika 3.

Imamo $|S_1B| = \frac{a_1\sqrt{2}}{2}$, $|S_2B_1| = \frac{a_2\sqrt{2}}{2}$, $|S_1G| = \frac{\sqrt{2}(a_1 - a_2)}{2}$, te $|B_1B| = |S_2G| = c$.

Iz pravokutnog trokuta S_2S_1G slijedi

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{\sqrt{2}(a_1 - a_2)}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{\sqrt{2}(a_1 - a_2)}{2}\right)^2}.$$

Ovo je, već gore spomenuta, formula koju je Heron znao.

U slučaju 14. zadatka iz Moskovskog papirusa dobivamo da je $c = \sqrt{36}$.

U Heronovoj *Metrici* navodi se primjer kad je $a_1 = 10$, $a_2 = 2$ i $c = 9$. Dobiva se da je

$$h = \sqrt{9^2 - 2 \cdot \left(\frac{10-2}{2}\right)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Heronova formula funkcionira! No, pogledajmo i slučaj koji se navodi u *Metrici*, kad je $a_1 = 28$, $a_2 = 4$ i $c = 15$. Dobivamo da je

$$h = \sqrt{15^2 - 2 \cdot \left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \cdots = \sqrt{-63}.$$

Heron je, tako kažu povijesni izvori, problem „elegantno" izbjegao tako da je „uzeo" vrijednost $\sqrt{63}$.

Dakle, suočavamo se s realnom situacijom u kojoj sve veličine postoje, formule su točne, a ne može se računom odrediti duljina visine!

Prijedlog: Pokušajte s 4 pobočke, koje su sukladni jednakokračni trapezi duljina osnovica 28 cm i 4 cm, te krakova 15 cm, „složiti" pobočje krnje piramide. Čeka vas iznenađenje! Možete li predvidjeti što će se dogoditi?

Zanima nas kada ova formula „funkcionira"? Za koje a_1, a_2 i c?

Iz $h^2 = c^2 - 2\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 > 0$ slijedi da je

$$c^2 > 2\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2,$$

odnosno da je $\sqrt{2}c > a_1 - a_2$.

U slučaju $a_1 = 28$, $a_2 = 4$ i $c = 15$ ova nejednakost nije ispunjena.

b) Stranice pravokutnog trokuta

Euklid je u svojim *Elementima* zadao ovakav zadatak.

Zadan je pravokutni trokut površine 7 i opsega 12. Nađite duljine njegovih stranica.

Imamo sljedeći sustav jednadžbi ako su duljine stranica pravokutnog trokuta jednake a, b i c:

$$\begin{cases} a \cdot b = 14 \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12 \end{cases}.$$

Diofant je ovaj problem rješavao tako da je uzeo supstituciju $a = \frac{1}{x}$, $b = 14x$. Dobiva se sustav

$$\begin{cases} 14 = 14 \\ \frac{1}{x} + 14x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 196x^2} = 12 \end{cases}.$$

Nakon sređivanja dobiva se kvadratna jednadžba

$$84x^2 - 43x + 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 2016}}{168},$$

odnosno

$$x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{168}.$$

I opet, pojavljuje se kvadratni korijen negativnog broja. (Uzgred, nije poznato kako je na pojavljivanje drugog korijena negativnog broja „reagirao" Diofant.)

Scenarij završnog razmatranja

a) Postavljanje problema

U razredu se podijele sljedeći zadatci.

1. Izračunajte visinu ili brid krnje kvadratne piramide ako je:

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $h = 6$,

b) $a_1 = 28$, $a_2 = 4$, $c = 1$.

2. Načinite model krnje kvadratne piramide ako je:

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $h = 6$,

b) $a_1 = 28$, $a_2 = 4$, $c = 1$.

3. Zadan je pravokutni trokut tako da mu je

a) površina jednaka 54 i opseg jednak 36,

b) površina jednaka 7 i opseg jednak 12.

4. Načinite letak o:

a) Moskovskom papirusu,

b) Euklidu,

c) Diofantu,

d) Bombelliju,

e) Argandu,

f) Wesselu.

b) Vrijeme pripreme

Svaki podzadatak rješava tim od barem dva učenika. Ostali, ako ih ima, sastavljaju i razmatraju pitanja koja će postavljati u raspravi.

Nakon sedam dana pripreme organizira se sat rasprave!

c) Sat-dva rasprave

Na početku sata podijele se svim učenicima letci iz zadatka 4. Raspravlja se redom zadatak po zadatak!

Svaka skupina prezentira problem i njegovo rješenje ili argumente zašto nisu uspjeli riješiti zadatak. U raspravi se trebaju „problematizirati" podatci zadani u zadatku, tj. treba ih mijenjati i uočavati što se pri tome događa!

Posebna se pozornost treba posvetiti činjenici i uzrocima da je tisuće godina „izbjegavano" računanje s drugim korijenom negativnog broja, kao i „hrabrosti" Bombellija i ostalih.

d) Završni osvrt

Nastavnik na kraju rasprave mora ukazati učenicima gdje se sve danas, u matematici i izvan matematike, koriste kompleksni brojevi. Kao dodatak, učenicima treba zadati da se upoznaju i s poviješću hiperkompleksnih brojeva!